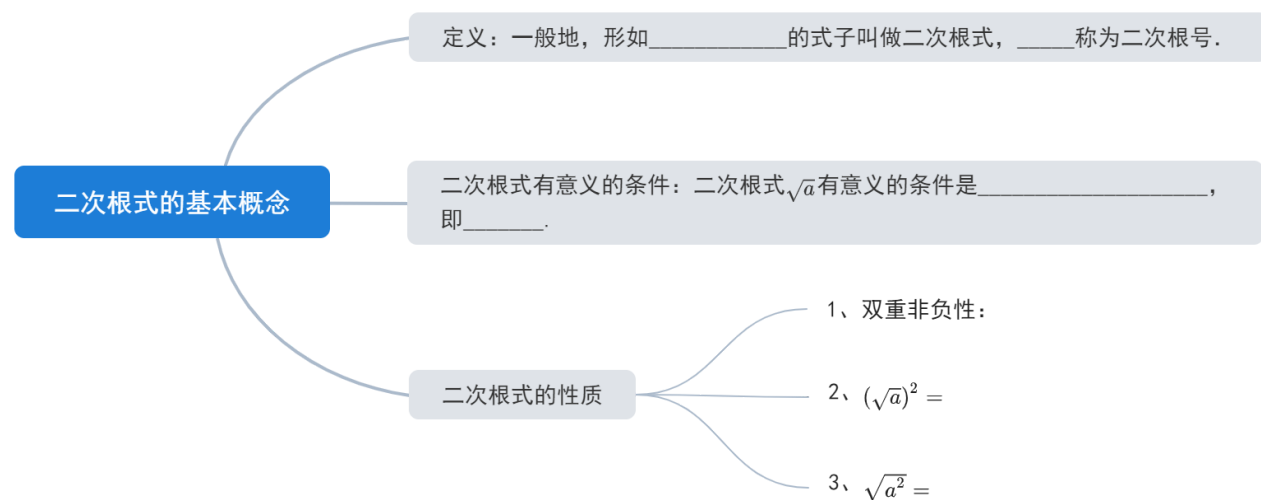


第1讲 二次根式的基本概念与运算

二次根式与勾股定理属于人教版第十六、第十七章的内容，这部分的易错点为二次根式与勾股定理的计算，难点为勾股定理的综合运用，是期中考试的高频考点。本模块《二次根式与勾股定理》，旨在帮助学生巩固二次根式的基本运算与勾股定理的简单应用，为后续《勾股定理进阶》奠定基础。

本模块难度适中，适用于二次根式与勾股定理的基础认知与简单应用，本模块分为二次根式的基本概念与运算、勾股定理与逆定理2讲内容，帮助学生了解二次根式与勾股定理的常见题型，掌握这部分的解题思路。

一、二次根式的基本概念



|| 例题

- 下列各式是二次根式的是（ ）。
A. $\sqrt{-7}$ B. $\sqrt{m}$ C. $\sqrt{a^2+1}$ D. $\sqrt[3]{3}$
- 若 $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是（ ）。
A. $x > \frac{1}{2}$ B. $x \geq \frac{1}{2}$ C. $x < \frac{1}{2}$ D. $x > 0$

|| 练习

- 下列各式： $\sqrt{a^2+1}$ ， $\sqrt{b+2}(b \geq 2)$ ， $\sqrt{-(3x-1)^2}$ ， $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ ， $\sqrt{b^2-4ac}$ ，其中是二次根式的个数有（ ）。
A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

4.

(1) 使式子 $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ 有意义的 x 的取值范围是 () .

- A. $x \geq 1$ B. $-1 \leq x \leq 2$ C. $x \leq 2$ D. $-1 < x < 2$

(2) 式子 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义的 x 的数值范围是 () .

- A. $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ B. $x \neq 1$ C. $x \geq -\frac{1}{2}$ D. $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$

(3) 若式子 $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{x-7}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 () .

- A. $x \neq 3$ B. $x > 3$ C. $x > 3$ 且 $x \neq 7$ D. $x \neq 2$

|| 例题

5. 若 a, b 为实数, 且 $b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1} + 4$, 则 $a+b$ 的值为 () .

- A. 3 B. 4 C. 3或5 D. 5

6. 计算 $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-3)^2}$ 的结果是 () .

- A. 1 B. -1 C. $2x-5$ D. $5-2x$

7. 若 $\sqrt{x^2-4x+4} + x = 2$, 则 x 的取值范围是 () .

- A. $x > 2$ B. $x < 2$ C. $x \geq 2$ D. $x \leq 2$

8. 已知 $|2020-a| + \sqrt{a-2021} = a$, 求 $a-2020^2$ 的值 .

|| 练习

9. 已知实数 x, y 满足 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{6-2x} + 2$, 求 x^y 的值 .

10. 已知 $\sqrt{2a+b^2} + |b^2-9| = 0$, 求 $a+b$ 的值 .

11. 若 $0 < x < 1$, 化简 $\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}$ 等于 ().

A. $\frac{2}{x}$ B. $-\frac{2}{x}$ C. $-2x$ D. $2x$

12. 已知 $\sqrt{(x-1000)^2} + (\sqrt{998-x})^2 = 2000$, $y = \sqrt{m+8} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m}$, 求 $y-x$ 的平方根.

二、二次根式的运算

二次根式的乘除

二次根式的乘除

二次根式的乘法法则: _____.

二次根式的除法法则: _____.

二次根式有理化

二次根式的加减

最简二次根式

- 1、被开方数不含_____.
- 2、被开方数中不含_____.
- 3、分母中不含_____.

分母有理化

- 1、利用 $\sqrt{a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$, 将二次根式分母有理化,
如: $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} =$
- 2、利用平方差公式 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$,
将二次根式分母有理化
如: $\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$
- 3、通过类似分式的“约分”进行分母有理化
如: $\frac{ab}{\sqrt{b}} =$

二次根式的加减

二次根式的加减

同类二次根式：把几个二次根式化成_____二次根式后，如果_____相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式。

二次根式的加减：实际上就是先把每个二次根式化成_____二次根式，再合并同类二次根式。

例题

13. 下列根式中属于最简二次根式的是 () .

A. $\sqrt{a^2+1}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{8}$

D. $\sqrt{27x}$

14. 若最简根式 $\sqrt{2b+5}$ 和 $\sqrt[3]{3b-4}$ 是同类二次根式，则 $a \cdot b$ 的值是 _____ .

练习

15. 化简二次根式 $\sqrt{-9x^3}$ 的结果是 () .

A. $3x\sqrt{-x}$

B. $-3x\sqrt{x}$

C. $3x\sqrt{x}$

D. $-3x\sqrt{-x}$

16. 若最简二次根式 $\frac{2}{3}\sqrt{3m^2-2}$ 与 $\sqrt[n^2-1]{4m^2-10}$ 是同类二次根式，则 m 的值是 _____ .

例题

17. 已知 $\sqrt{24n}$ 是整数，正整数 n 的最小值为 () .

A. 0

B. 1

C. 6

D. 36

18. 计算下列各题 .

(1) $\frac{1}{2}\sqrt{12} \cdot \left(3\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2}\right)$.

(2) $\sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{2\frac{1}{3}} \times \sqrt{1\frac{2}{5}}$.

(3) $\sqrt{48} - \sqrt{54} \div \sqrt{2} + (3 - \sqrt{3})\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(4) $(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) - (1 - \sqrt{2})^2$.

练习

19. 能使等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的 x 的取值范围是 () .

A. $x > 2$

B. $x \neq 2$

C. $x \geq 0$

D. $x \geq 2$

20. 若 $\sqrt{75n}$ 是整数, 则正整数 n 的最小值是 _____ .

21. 回答下面问题:

(1) $\frac{4}{3}\sqrt{18} \div (2\sqrt{8} \times \frac{1}{3}\sqrt{54})$.

(2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})$.

(3) $\frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$.

(4) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48}$.

(5) $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2)^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

例题

22. 当 $x = \sqrt{23} - 1$ 时, 代数式 $x^2 + 2x + 2$ 的值是 _____ .

23. 把下列各式分母有理化:

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

(2) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

(3) $\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2}$.

24. 把 $(3x-2)\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 根号外的因式移到根号内后, 其结果是_____.

练习

25. 已知 $a = 2\sqrt{2} + 3$, $b = 2\sqrt{2} - 3$, 求:

(1) $a + b$.

(2) $a - b$.

(3) $a^2 + b^2$.

(4) $a^2 - 2ab + b^2$.

26. 阅读下列材料, 然后回答问题.

在进行二次根式的化简与运算时, 我们有时会碰上如 $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 一样的式子, 其实我们

还可以将其进一步化简: $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{3}-1,$$

以上这种化简的步骤叫做分母有理化.

(1) 化简 $\frac{3}{\sqrt{27}}$.

(2) 化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

(3) 化简: $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

27. 已知 $\sqrt{x^3 + 3x^2} = -x\sqrt{x+3}$, 则 () .

A. $x \leq 0$

B. $x \leq -3$

C. $x \geq -3$

D. $-3 \leq x \leq 0$

28. 将下列各式根号外的因式移入根号内：

(1) $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

(2) $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$.

(3) $\frac{a}{a-b}\sqrt{-\frac{(b-a)^2}{a}}$.